

# Gleason被覆と射影的被覆の普遍性による特徴付け

本稿では、位相空間論における重要な構成概念である「Gleason被覆」を、圏論における「普遍性（universal property）」および「射影的被覆（projective cover）」の観点から完全に特徴付け、その存在と一意性に関する詳細な数学的議論および厳密な証明を展開する。さらに、この概念が抽象化され、数学の他分野においてどのように一般化・応用されているかについて、包括的かつ自己完結的（self-contained）に記述する。

## 1. 舞台設定と普遍性によるGleason被覆の定義

すべての構造の出発点として、コンパクトHausdorff空間とそれらの間の連続写像を対象および射とする圏を **CompHaus** と定義する。この圏において、与えられた任意のコンパクトHausdorff空間  $X$  に対し、その「Gleason被覆」と呼ばれる空間および写像のペアは、抽象圏論における「射影的被覆」が満たすべき普遍性によって、同型（すなわち位相同成）を除いて一意に特徴付けることができる。

### 1.1 射影的对象と超不連結空間

圏論において、ある対象  $P$  が射影的（projective）であるとは、次の普遍的な持ち上げ（リフト）の性質を満たすことを指す：

任意の全射連続写像  $f: Y \rightarrow Z$  と、任意の連続写像  $g: P \rightarrow Z$  が与えられたとき、必ずある連続写像  $h: P \rightarrow Y$  が存在して、等式  $f \circ h = g$  を充足する。

1958年に A. M. Gleason が示した記念碑的な定理により、圏 **CompHaus** において「対象が射影的であること」と「空間が超不連結（extremally disconnected：任意の開集合の閉包が再び開集合になる位相空間）」であることは完全に同値であることが証明されている。したがって、圏 **CompHaus** における射影的对象とは、超不連結なコンパクトHausdorff空間そのものの謂いである。

### 1.2 既約性と本質的全射

Gleason被覆の本質的な「無駄のなさ」を担保するために導入されるトポロジー的概念が「既約な全射」である。2つのコンパクトHausdorff空間の間の全射連続写像  $p: E \rightarrow X$  が既約（irreducible）であるとは、 $E$  の任意の真の閉部分集合  $F \subsetneq E$  に対して、その写像による像が  $p(F) \neq X$  となる（すなわち、 $E$  の一部分を削るともはや  $X$  を覆いきれなくなる）ことをいう。これは、圏 **CompHaus** における本質的エピ射（essential epimorphism）の概念と完全に一致する。圏論における本質的エピ射とは、以下の性質を満たすエピ射（全射）  $p$  を指す：

任意の空間  $C$  からの任意の連続写像  $g: C \rightarrow E$  を考えたとき、合成写像  $p \circ g: C \rightarrow X$  が全射（エピ射）にな

るならば、内部の写像である  $g$  自身も必ず全射（エピ射）でなければならない。

### 1.3 普遍性による特徴付け

以上の概念を統合することにより、任意のコンパクトHausdorff空間  $X$  に対する Gleason被覆  $p: E \rightarrow X$  は、以下の4つの条件を満たす普遍性として完全に定義・特徴付けられる：

1.  $E$  は射影的对象（すなわち、超不連結なコンパクトHausdorff空間）である。
2.  $p: E \rightarrow X$  は本質的エピ射（すなわち、既約な全射連続写像）である。
3. **【普遍性：リフトの存在】** 任意の射影的对象（超不連結なコンパクトHausdorff空間）  $Q$  と、任意の連続写像  $q: Q \rightarrow X$  が任意に与えられたとき、必ず連続写像  $h: Q \rightarrow E$  が存在して、

$$p \circ h = q$$

を満足する。

4. **【最小性：一意性】** もし別の組  $(E', p')$  も上記の条件1、2、3を満たす位相空間および写像のペアであるならば、 $E$  と  $E'$  の間には位相同型写像が必ず存在する。

## 2. 本質的全射（既約性）の必要性

普遍性による特徴付けにおいて、条件2として課されている「本質的エピ射（既約な全射）」という制限は、概念の成立において絶対に不可欠である。もしこの条件を取り払って、単に「射影的对象からの全射」という条件のみに変えてしまうと、射影的被覆が満たすべき一意性（最小性）が根底から破壊され、元の空間に対して「無駄に大きすぎる超不連結空間」が無限に条件を満たすようになってしまう。

この事態を可視化するために、最も極端な例として、元の空間  $X$  をたった1つの点のみからなる一点空間  $X = \{*\}$  とする。 $X$  はそれ自体がすでに超不連結なコンパクトHausdorff空間であるため、本来あるべき正しい意味での Gleason被覆は、自身と同型な  $E = \{*\}$  のみである。

ここで、別の巨大な超不連結空間として、離散位相を備えた自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  の Stone-Čech コンパクト化空間である  $Q = \beta\mathbb{N}$  を導入する。そして、この巨大な空間  $Q$  のすべての点を  $X$  の唯一の点  $*$  へと押し潰す連続全射  $q: Q \rightarrow X$  を構成する。このとき、次の性質がすべて満たされてしまう：

- $Q = \beta\mathbb{N}$  は、コンパクトHausdorff空間であり、かつ超不連結空間（すなわち射影的对象）である。
- $q: Q \rightarrow X$  は連続写像であり、かつ全射である。
- 任意の空間から  $X$  への連続写像は、 $Q$  を経由して自明に（任意に）持ち上げることができる。

しかし、言うまでもなく  $Q = \beta\mathbb{N}$  と正しい被覆である  $E = \{*\}$  はまったく位相同型ではない。本質的エピ射（既約性）という条件を課さない場合、このような「いくらでも冗長に拡張された空間」がすべて被覆の候補として混入してしまう。本質的エピ射の定義（既約性）を適用すれば、 $Q = \beta\mathbb{N}$  の中から任意の1点のみからなる閉部分集合  $A = \{p\}$

を選択したとき、 $q(A) = \{*\} = X$ となってしまう、「真の部分集合でも全体を覆ってしまう」ため既約性を満たさず、不適切な候補として正しく排除されるのである。

## 3. リフトの一意性を要求した場合の破綻

数学における通常の普遍性の定義（例えば、極限やコ極限、あるいは随伴関手など）では、リフトや全射の存在に加えて「写像が一意に存在する」という一意性要件を課することが一般的である。しかし、Gleason被覆（射影的被覆）の文脈においてリフトの「一意性」を厳密に要求してしまうと、一般の位相空間に対する被覆がそもそもこの世に存在しえなくなるという致命的なトポロジー的破綻を招く。これについて、以下の強い普遍性を仮定して破綻を実証する。

### 3.1 仮定される強い普遍性

仮に、Gleason被覆が以下の条件1'および条件2'という、リフトの一意性を伴う強い意味での普遍性で定義可能であると想定する：

- 条件1'**:  $p: E \rightarrow X$  は、超不連結なコンパクトHausdorff空間  $E$  から任意のコンパクトHausdorff空間  $X$  への連続写像である。
- 条件2'**: 任意の超不連結なコンパクトHausdorff空間  $Q$  と、任意の連続写像  $q: Q \rightarrow X$  に対し、 $p \circ h = q$  を満たす連続写像  $h: Q \rightarrow E$  が**ただ一つ (unique)** 存在する。

### 3.2 一点空間を用いた存在の否定証明

この強い普遍性が成立していると仮定し、テスト空間として最も単純な超不連結コンパクトHausdorff空間である一点空間  $Q = \{*\}$  を代入してみる。

- 一点空間からの連続写像  $q: \{*\} \rightarrow X$  を指定することは、値域  $X$  の中から任意の点  $x \in X$  を1つ選択すること ( $q(*) = x$ ) と完全に同値である。
- 同様に、持ち上げられた写像  $h: \{*\} \rightarrow E$  を指定することは、空間  $E$  の中から点  $u \in E$  を1つ選択すること ( $h(*) = u$ ) と同値である。
- このとき、条件式  $p \circ h = q$  が意味するものは、点としての等式  $p(u) = x$  に他ならない。

ここで、条件2'が要請する「ただ一つ存在する」という制限をこの設定にそのまま適用すると、どのような帰結が得られるだろうか。それは、「 $X$  の任意の点  $x \in X$  に対して、 $p(u) = x$  を満たすような  $E$  の点  $u \in E$  が**ただ一つだけ存在する**」という命題になる。これは、連続写像  $p: E \rightarrow X$  が、集合論的な意味において**全単射 (bijection)** であることを直接的に意味している。

一般の位相空間論における既知の基礎定理として、「コンパクト空間からHausdorff空間への連続な全単射写像は、自動的に同相写像（位相同型）になる」という性質がある。したがって、上記の  $p: E \rightarrow X$  は単なる全単射を越えて、位相同型写像でなければならない。しかし、定義により始域  $E$  は超不連結でなければならないため、これと同相である行き先の空間  $X$  もまた、最初から超不連結な空間でなければならないことになる。結果として、 $X$  が閉区間  $[0, 1]$  や円周のように、超不連結ではない連続的な位相構造を持っている場合、このような「一意なリフトを伴う被覆  $E$ 」は

絶対に存在し得ない。これが、Gleason被覆の定義においてリフトの「一意性」を断念し、代わりに写像の「本質性（既約性）」を条件に据えざるを得ないトポロジー的な必然性である。

## 4. 位相空間論における詳細な証明

本節では、具体的なトポロジーの内部構造に踏み込み、「条件1： $E$  が超不連結な コンパクトHausdorff空間である」こと、および「条件2： $p: E \rightarrow X$  が既約な全射連続写像である」という2つの前提のみから、リフトの存在（普遍性）および被覆の一意性が完全に導出されることを詳細に証明する。

### 補題1：極小な閉部分空間（既約全射）の存在

コンパクト空間の間の任意の全射連続写像  $f: A \rightarrow B$  に対し、ある  $A$  の閉部分空間  $A' \subseteq A$  が存在して、制限写像  $f|_{A'}: A' \rightarrow B$  は既約な全射となる。

#### 【証明】

$A$  の閉部分集合からなる族であって、写像による像が  $B$  全体となるようなもの全体のコレクションを  $\mathcal{F} = \{F \subseteq A \mid F \text{ は閉集合 かつ } f(F) = B\}$  と定義する。全体の空間  $A$  自身が  $A \in \mathcal{F}$  を満たすため、 $\mathcal{F} \neq \emptyset$  である。ここで、 $\mathcal{F}$  に対して集合の包含関係の逆（すなわち、 $F_1 \leq F_2 \iff F_1 \supseteq F_2$ 、小さい閉集合ほど順序として「大きい」とみなす）によって偏順序を導入する。 $\mathcal{F}$  の中から任意の全順序部分集合（鎖） $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を選択する。各  $F_\lambda$  はコンパクト空間  $A$  の閉集合である。任意の点  $b \in B$  を固定したとき、閉集合の族  $\{F_\lambda \cap f^{-1}(b)\}_{\lambda \in \Lambda}$  は、有限個の共通部分が常に非空であるという有限交叉性（finite intersection property）を満たす。なぜなら、任意の有限個の添字に対しては全順序性から最小の閉集合が存在し、その像は  $B$  全体だからである。 $A$  のコンパクト性により、これらすべての無限共通部分

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (F_\lambda \cap f^{-1}(b)) = \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right) \cap f^{-1}(b)$$

もやはり空集合にはならない。これが任意の  $b \in B$  で成り立つことは、 $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) = B$  であることを意味し、すなわち  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$  となる。したがって、この鎖は  $\mathcal{F}$  内に上界（共通部分）を持つ。Zornの補題を適用することにより、 $\mathcal{F}$  には極大元（包含関係としては極小な閉集合） $A'$  が存在することが従う。この極小性の定義に基づけば、 $A'$  のどんな真の閉部分集合  $C \subsetneq A'$  を持ってきたとしても、それはもはや  $\mathcal{F}$  に属さない。すなわち  $f(C) \neq B$  となるため、制限写像  $f|_{A'}: A' \rightarrow B$  は既約な全射写像である。

■

### 補題2：超不連結空間への既約全射は同相写像である

$W$  を任意のコンパクトHausdorff空間、 $Q$  を超不連結なコンパクトHausdorff空間とする。もしこれらの間の連続写像  $f: W \rightarrow Q$  が既約な全射であるならば、 $f$  は同相写像（位相同型）である。

### 【証明】

コンパクト空間からHausdorff空間への連続な全単射写像が自動的に同相写像になるという標準定理を考慮すれば、この連続全射  $f$  が「単射」であることを証明すれば十分である。  $W$  の任意の開集合  $U$  に対して、写像による「シャープ操作」を  $f^\sharp(U) = Q \setminus f(W \setminus U)$  と定義する。  $W \setminus U$  は閉集合であり、  $W$  のコンパクト性からその連続像  $f(W \setminus U)$  も  $Q$  の閉集合となる。その補集合である  $f^\sharp(U)$  は、したがって  $Q$  の開集合である。さらに、  $f$  が既約全射であるという仮定から、  $U$  が非空 ( $U \neq \emptyset$ ) であれば、その真の部分集合の像が  $Q$  を覆い尽くすことはないため、必ず  $f^\sharp(U) \neq \emptyset$  となる。また、定義の構成から、常に包含関係  $f^{-1}(f^\sharp(U)) \subseteq U$  が成立する。いま、  $f$  が単射ではないと仮定し、  $f(w_1) = f(w_2) = q \in Q$  を満たすような、互いに異なる2つの点  $w_1 \neq w_2 \in W$  が存在したとして矛盾を導く。  $W$  はHausdorff空間であるから、異なる点  $w_1, w_2$  に対して、互いに素な開近傍  $U_1, U_2$  ( $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ) が選べる。ここで、開集合  $f^\sharp(U_1)$  の閉包  $K = \text{Cl}(f^\sharp(U_1))$  を考える。行き先の空間  $Q$  は超不連結空間であるという最大の仮定から、任意の開集合の閉包は開集合になる。すなわち、  $K$  は  $Q$  の「開かつ閉集合 (clopen set)」である。ここで、包含関係  $U_1 \subseteq f^{-1}(K)$  が成り立つことを示す。もしこれが成り立たないと仮定すると、差集合としての開集合  $U_1 \setminus f^{-1}(K)$  は空ではなくなる。既約性から、そのシャープ像  $f^\sharp(U_1 \setminus f^{-1}(K))$  も非空な開集合となるが、シャープの定義からこれは  $f^\sharp(U_1) \subseteq K$  に含まれなければならないと同時に、  $K$  の外側 (すなわち補集合  $Q \setminus K$ ) にも含まれなければならない、矛盾が生じる。よって、  $U_1 \subseteq f^{-1}(\text{Cl}(f^\sharp(U_1)))$  が確定する。全く同様の議論を  $U_2$  に適用することで、  $U_2 \subseteq f^{-1}(\text{Cl}(f^\sharp(U_2)))$  も得られる。元々の構成から  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  であるため、定義より  $f^\sharp(U_1) \cap f^\sharp(U_2) = \emptyset$  である。空間  $Q$  の超不連結性 (極端な不連結性) のもう一つの同値変形として、「交わらない2つの開集合は、その閉包も交わらない」という性質がある。したがって、  $\text{Cl}(f^\sharp(U_1)) \cap \text{Cl}(f^\sharp(U_2)) = \emptyset$  が成立する。しかしながら、仮定から共通の像の点  $q$  について、  $q = f(w_1) \in f(U_1) \subseteq \text{Cl}(f^\sharp(U_1))$  であると同時に、  $q = f(w_2) \in f(U_2) \subseteq \text{Cl}(f^\sharp(U_2))$  でもあり、両者の閉包が交わらないという結論に真っ向から矛盾する。ゆえに、異なる2点が同じ点に移るといふ仮定は誤りであり、  $f$  は単射、ひいては同相写像である。 ■

## 4.1 普遍性 (リフトの存在) の証明

### 【証明】

条件1および条件2を満たすペア  $(E, p)$  が手元にあり、任意の超不連結なコンパクトHausdorff空間  $Q$  と、任意の連続写像  $q: Q \rightarrow X$  が与えられたとする。これらに対して、直積位相空間  $Q \times E$  の部分空間として、以下の「ファイバー積 (引き戻し: pullback)」を集合論的に構成する:

$$W = \{(u, x) \in Q \times E \mid q(u) = p(x)\}$$

$Q \times E$  はコンパクトHausdorff空間の直積なのでコンパクトHausdorffであり、  $W$  は連続写像の等式で定義されたグラフの共通部分、すなわち閉部分空間である。よって  $W$  自身もコンパクトHausdorff空間となる。ここで、  $W$  から  $Q$  への自然な第1射影  $\pi_1: W \rightarrow Q$  ( $\pi_1(u, x) = u$ ) を考える。元の写像  $p: E \rightarrow X$  が全射であるため、任意の点  $u \in Q$  を選んだとき、その像  $q(u) \in X$  に対応して  $p(x) = q(u)$  を満たす点  $x \in E$  が必ず存在する。これは対  $(u, x)$  が  $W$  に属することを意味するため、射影  $\pi_1$  は全射な連続写像である。ここで、先ほど証明した補題1をこの全射連続写像  $\pi_1: W \rightarrow Q$  に適用する。すると、  $W$  の閉部分空間  $W' \subseteq W$  が存在して、制限写像  $\pi_1|_{W'}: W' \rightarrow Q$  を既約な全射連続写像にすることができる。行き先の空間  $Q$  は超不連結なコンパクトHausdorff空間であるため、今度は補題2をこの  $\pi_1|_{W'}: W' \rightarrow Q$  に適用することができる。これにより、  $\pi_1|_{W'}$  は単なる既約全射を越えて「同相写像」であることが確定する。同相写像であるならばその逆写像

$s : Q \rightarrow W'$  が一意に存在し、これは元の射影の連続な切断（セクション： $\pi_1 \circ s = \text{id}_Q$ ）となる。もう一つの自然な第2射影  $\pi_2 : W \rightarrow E$  ( $\pi_2(u, x) = x$ ) を用いて、目的の写像  $h : Q \rightarrow E$  を、合成写像  $h = \pi_2 \circ s$  として定義する。 $h$  は連続写像の合成であるため、当然に連続写像である。任意の点  $u \in Q$  に対して、切断による像を  $s(u) = (u, x) \in W'$  と置くと、定義から  $h(u) = x$  である。ファイバー積  $W$  の定義の本質から、この点のペアは等式  $p(x) = q(u)$  を満たしている。したがって、 $p(h(u)) = p(x) = q(u)$  がすべての点について成立し、すなわち写像のレベルにおいて  $p \circ h = q$  を満たすリフト  $h$  が存在することが示された。 ■

## 4.2 一意性（同型性）の証明

### 【証明】

ある同一の空間  $X$  に対して、2つのペア  $(E_1, p_1)$  と  $(E_2, p_2)$  が、ともに条件1（超不連結コンパクト Hausdorff）および条件2（既約全射）のすべてを同時に満たしていると仮定する。まず、 $(E_1, p_1)$  が持つ全射性（エピ性）と、もう一方の  $(E_2, p_2)$  における  $E_2$  の超不連結性（射影性）に着目し、いま直前で証明した「普遍性（リフトの存在）」を適用する。対象を  $Q = E_2$ 、写像を  $q = p_2$  と読み替えることで、連続写像  $g : E_2 \rightarrow E_1$  が存在して、等式  $p_1 \circ g = p_2$  を満たす。全く同様に、立場を完全に入れ替えて普遍性を適用することにより、連続写像  $f : E_1 \rightarrow E_2$  が存在して、等式  $p_2 \circ f = p_1$  を満たす。次に、像としての集合  $f(E_1)$  を考える。これはコンパクト空間  $E_1$  の連続写像による像であるため、Hausdorff空間  $E_2$  の中において閉集合となる。このとき、等式の結合から、

$$p_2(f(E_1)) = (p_2 \circ f)(E_1) = p_1(E_1) = X$$

が成り立つ。しかし、仮定より写像  $p_2 : E_2 \rightarrow X$  は「既約な」全射である。既約性の定義は、真の閉部分集合の像は決して全体  $X$  にはなり得ないということであった。したがって、その閉部分空間は全体でなければならず、 $f(E_1) = E_2$ 、すなわち写像  $f$  は全射（エピ射）であることが証明される。さらに、この全射連続写像  $f : E_1 \rightarrow E_2$  自体が「既約」であることを示す。もし  $f$  が既約でないとは仮定すると、 $E_1$  のある真の閉部分集合  $C \subsetneq E_1$  が存在して、 $f(C) = E_2$  となってしまう。この仮定の下で、両辺に左から連続写像  $p_2$  を施すと、

$$p_2(f(C)) = p_2(E_2) = X$$

が得られる。しかし、等式の関係から左辺の合成は  $p_1(C)$  に等しい。すなわち、 $p_1(C) = X$  という結論が導かれる。これは、元々の前提である「 $p_1$  は既約全射である」という事実（真の閉集合  $C$  の像は  $X$  になれない）に明確に矛盾する。したがって、真の閉集合の像が全体に達することはなく、 $f : E_1 \rightarrow E_2$  は既約な全射連続写像であることが証明された。以上の議論を結集すると、写像  $f : E_1 \rightarrow E_2$  は既約な全射連続写像であり、かつその行き先である空間  $E_2$  は超不連結なコンパクト Hausdorff空間である。ゆえに、ここでも**補題2**をそのままダイレクトに適用することができ、連続写像  $f$  は位相同型写像（同相）であることが結論付けられる。これにより、条件を満たす被覆空間は一意的に定まる。 ■

## 5. 圏論的な一般化と証明

前節までのトポロジーに基づく個別具体的な議論は、現代の数学においては、空間の「点」や「開集合」といった内部構造への依存を一切排除し、「対象」と「射の合成」という純粋に代数的な矢印の性質のみへと抽象化・一般化されている。この抽象圏論の舞台において、Gleason被覆に対応する一般化された概念こそが、「射影的被覆 (projective cover)」である。

## 5.1 圏論の言葉への翻訳

任意の抽象圏  $\mathcal{C}$  を想定する。この圏の内部において、これまでの位相幾何学的概念は以下のように完全に再定義される：

- **エピ射 (epimorphism)** : 右キャンセル律を満たす射。すなわち、任意の射のペアに対して、等式  $f \circ e = g \circ e \implies f = g$  を常に満たすような射  $e$  のこと。(位相空間の圏における全射の一般化)
- **射影的对象 (projective object)** : 圏内の対象  $P$  が射影的であるとは、任意のエピ射  $e: A \rightarrow B$  と、任意の射  $h: P \rightarrow B$  が与えられたとき、必ずある射  $k: P \rightarrow A$  が存在して、等式  $e \circ k = h$  を満たすことをいう。
- **本質的エピ射 (essential epimorphism)** : あるエピ射  $p: E \rightarrow X$  が本質的であるとは、圏内の任意の射  $g: Y \rightarrow E$  を持ってきたとき、合成された射  $p \circ g$  が再びエピ射になるのであれば、その内部にある射  $g$  自身も必ずエピ射でなければならない、という随伴的な性質を満たすことをいう。(既約全射の一般化)

## 5.2 射影的被覆の定義と一意性定理

**【定義：射影的被覆】** 圏  $\mathcal{C}$  の特定の対象  $X$  に対する射影的被覆とは、以下の2つの条件を同時に満たす、対象と射のペア  $(P, p)$  のことである：

1.  $P$  は、圏  $\mathcal{C}$  における射影的对象である。
2.  $p: P \rightarrow X$  は、圏  $\mathcal{C}$  における本質的エピ射である。

**【定理：射影的被覆の一意性】** 圏  $\mathcal{C}$  の対象  $X$  に対して、もし射影的被覆が存在するならば、それは圏論的な同型 (isomorphism) を除いて一意に決定される。

### 【一意性の圏論的証明】

同一の対象  $X$  に対して、2つの異なる射影的被覆  $(P_1, p_1)$  と  $(P_2, p_2)$  が存在していると仮定する。圏論のルールのみを用いてこれらが同型であることを示す。

#### 1. 前方リフトの構成:

定義により、 $P_1$  は射影的对象であり、また  $(P_2, p_2)$  が被覆であることから  $p_2: P_2 \rightarrow X$  はエピ射である。したがって、射影的对象の定義を直接適用することにより、ある射  $f: P_1 \rightarrow P_2$  が存在して、次の図式を可換にする：

$$p_2 \circ f = p_1$$

#### 2. 射 $f$ がエピ射であることの証明:

第一のペア  $(P_1, p_1)$  は射影的被覆であるから、 $p_1$  はエピ射である。ステップ1の等式から、合成射  $p_2 \circ f$  もまたエピ射である。ここで、第二のペアの射  $p_2$  は単なるエピ射ではなく「本質的エピ射」である。本質的エピ射の定義は「合成がエピ射なら内側もエピ射」というものであったから、これより直ちに、誘導された射  $f: P_1 \rightarrow P_2$  自身がエピ射であることが従う。

### 3. 逆方リフト（切断）の構成:

今度は、もう一方の対象  $P_2$  が射影的对象であるという性質と、先ほどのステップ2で勝ち取った「 $f: P_1 \rightarrow P_2$  はエピ射である」という事実を組み合わせる。再び射影的对象の定義を適用することにより、ある逆向きの射  $g: P_2 \rightarrow P_1$  が存在して、次の等式を満たす:

$$f \circ g = \text{id}_{P_2}$$

これは、射  $g$  が射  $f$  の右逆元（セクション：切断）であることを意味している。

### 4. 射 $g$ がエピ射であることの証明:

ステップ3で得られた等式の両辺に対して、左から射  $p_2$  を結合させる。

$$p_2 \circ (f \circ g) = p_2 \circ \text{id}_{P_2} = p_2$$

圏における結合法則（associativity）を適用して左辺の括弧を組み替えると、 $(p_2 \circ f) \circ g = p_2$  となる。ここに、ステップ1で確立した等式  $p_2 \circ f = p_1$  を代入することにより、次の重要な可換性を得る:

$$p_1 \circ g = p_2$$

被覆の定義より、右辺の  $p_2$  はエピ射であるから、左辺の合成  $p_1 \circ g$  もエピ射である。ここで、第一の被覆の射  $p_1$  が「本質的エピ射」であるという性質をもう一度発動する。これにより、内側にある射  $g: P_2 \rightarrow P_1$  自身も必ずエピ射でなければならないことが証明される。

### 5. 同型射の結論:

ここまでのステップで、射  $g: P_2 \rightarrow P_1$  は「エピ射」であり、かつステップ3の式から「右逆元を持つ射（スプリット・モノ射）」でもある。抽象圏論の一般論（基礎的な図式論）において、「右逆元を随伴しているエピ射は、自動的に同型射（isomorphism）に格上げされる」という普遍的な補題が存在する。したがって、射  $g$  は同型射であり、その逆元が  $f$  に一致することが確定する。これより射  $f$  もまた同型射となり、対象  $P_1$  と  $P_2$  は圏の中で完全に同型であることが証明された。 ■

\* 注意すべき点として、この圏論的な一意性証明は「もし存在すれば一意である」ことのみを主張しており、対象となる圏の中で実際に射影的被覆が構築できるかという「存在性」までは保証しない。特定の圏（例えば前述の **CompHaus**）において実際に存在するか否かを確定させるためには、第4節で詳述したような、その位相空間の内部構造に依存した個別構成論（トポロジー）がどうしても不可欠となる。

## 6. 応用例10選

この「無駄な余剰を極限まで削ぎ落として対象を最良の形で包摂する」という射影的被覆の概念、およびその矢印を完全に反転させた双対概念である「単射的包絡 (injective envelope)」 (本質的モノ射による、単射的对象への極小拡大) は、現代数学のあらゆる高次領域において、構造を解明するための極めて強力な基盤テクノロジーとして応用されている。以下にその代表的な10の応用事例を解説する。

## 1. Artin環上の加群の分類 (環論)

一般の代数的な環上の加群の圏においては、射影的被覆が任意の対象に対して存在するとは限らない。しかし、環が「左 Artin環」 (例えば、体上の有限次元代数など) や「局所環」という良好な構造を持つ場合、その圏における任意の有限生成加群には、射影的被覆が**必ず一意に存在**することが定理として知られている。これにより、極めて複雑な内部構造を持つ一般の加群の分類問題を、構造が完全に分かっている「射影加群」の直和因子 (基本ブロック) の言葉へと正確に翻訳し、帰着させることが可能となる。

## 2. 有限群のモジュラー表現論 (群の表現論)

有限群の表現論において、表現を構成する体の標数  $p$  が群の位数を割り切る場合 (モジュラー表現)、表現の圏は半単純性を失い、構造が激しく複雑化する。この圏において、各既約表現 (単純加群)  $S$  に対する射影的被覆  $P(S)$  は、表現論において「射影不分解加群 (PIMs: projective indecomposable modules)」という極めて重要な名前と呼ばれる。PIMsはモジュラー表現の圏における本質的な「骨組み」を形成し、その加群の構造を調べることで群の表現全体の決定や Brauer 指標の計算へと直結する。

## 3. 極小射影分解の構成 (ホモロジー代数学)

ホモロジー代数学において、対象  $X$  の構造を解明するために、射影的对象を並べた長完全列 (分解) を作る。このとき、単に分解を作るのではなく、まず  $X$  の射影的被覆  $P_0 \rightarrow X$  をとり、その写像の核 (Kernel) に対して再び射影的被覆  $P_1 \rightarrow \text{Ker}(p_0)$  をとる、という操作を無限に繰り返して得られる複体を「極小射影分解 (minimal projective resolution)」と呼ぶ。これは  $X$  が持つ「ホモロジー的な無駄のない純粋な骨格」であり、これを用いることで  $Ext$  群や  $Tor$  群、環のグローバル次元といった重要な代数的普遍量を最もスマートに計算することができる。

## 4. 籠 (quiver) の表現論

有向グラフ (籠) の頂点に線形空間を、矢印に線形写像を割り当てる籠の表現論は、現代代数学の主要分野である。各頂点に対応する最も単純な表現 (単純表現) に対して射影的被覆を構成すると、それはグラフの「道 (path)」の空間がなす代数 (path algebra) の直和因子として、幾何学的な経路のデータから完全に、かつ具体的に書き下すことができる。これにより、籠の形状という純幾何学的な情報から、表現の圏の代数的構造をダイレクトに引き出すことができる。

## 5. 集合論の強制法とブール値モデル (数理論理学)

位相空間  $X$  の Gleason被覆空間  $E$  を構築したとき、 $E$  が超不連結であることから、その上の正則開集合のなす構造は「完備ブール代数  $\mathbb{B} = \text{RO}(X)$ 」となる。数理論理学・集合論においては、この完備ブール代数  $\mathbb{B}$  を用いて、通常の集合の宇宙を拡張した「ブール値モデル  $V^{\mathbb{B}}$ 」という新しい宇宙を創造する。これこそが、P. J. Cohen が開発した「強制法 (forcing)」の代数的定式化であり、連続体仮説が標準的な集合論 (ZFC) から証明も反証もできない独立な命題

であることの証明の絶対的基盤となっている。

## 6. 点なし位相空間論 (pointfree topology / ロケール理論)

伝統的な「点の集合」をベースにしたトポロジーの限界を突破するために、開集合たちのなす格子（束）の構造そのものを主役に据える数学の分野である（ロケール理論）。完備正則ロケールの圏における射影的被覆は、古典的な位相空間における Gleason被覆を「点を用いない純粋な代数的言葉」で一般化したものとなる。この研究は、位相空間論における選択公理（Zornの補題）への依存度を明確に切り分け、構造の本質をあぶり出すために応用される。

## 7. 直観主義論理とHeyting代数 (数理論理学)

排中律を認めない直観主義論理の代数的モデルは、ブール代数を一般化した「Heyting代数」によって記述される。Heyting代数のなす圏における射影的对象、および任意の論理構造からの射影的被覆の研究は、直観主義論理における論理式の充足可能性問題（判定問題）や、自由 Heyting代数の持つ幾何学的・代数的レイアウトを完全に解明するための非常に強力な決定打として機能する。

## 8. 傾合理論 (tilting theory) と導来圏の同値

環論・表現論において、ある代数  $A$  の上の加群の圏と、別の代数  $B$  の上の加群の圏という、一見して全く異なる2つの世界の間で構造をそっくり移し替えるための最高峰の理論が傾合理論 (tilting theory) である。この理論の核となる「Tilting対象」を構築するステップにおいて、既約な対象からの射影的被覆の存在とその変形操作が決定的な役割を演じる。これにより、両者の圏が「導来圏 (Derived Category)」という高次のホモロジーの舞台において完全に同値 (K. Morita 型同値の一般化) になるという大定理が導かれる。

## 9. 可換環論におけるMatlis双対性 (単射的包絡の応用)

射影的被覆のすべての矢印をひっくり返した双対概念である「単射的包絡」は、加群の圏の内部においては、**どんな環の上のどんな加群に対しても絶対に、一意に存在する**という、射影側を圧倒する極めて強力な存在定理が成り立つ。E. Matlis はこの性質を極限まで活用し、ネーター局所環上の構成層の分析や、現代の代数幾何学の基礎を支える局所コホモロジー論の土台となる「**Matlis双対性**」を確立した。これは可換環論における最高峰の不変量抽出ツールである。

## 10. 複素幾何学におけるエンベロープ (包絡空間)

幾何学的な双対性の文脈において、複素多様体、あるいはその上に展開する「正則関数の層」といった幾何学的対象に対して、解析的な意味での極大性やインジェクティビティ (単射性) を備えたより大きな空間へと埋め込み、包み込む操作 (例えば、ホロモルフィック・エンベロープ: 正則包の構成など) が行われる。これも、多変数複素関数論の文脈を圏論の高度な抽象視点から俯瞰すれば、本質的モノ射 (essential monomorphism) を基礎に据えた構造抽出、すなわち「単射的包絡」の幾何学的・解析的変形版として、その底流で完全に繋がっているのである。